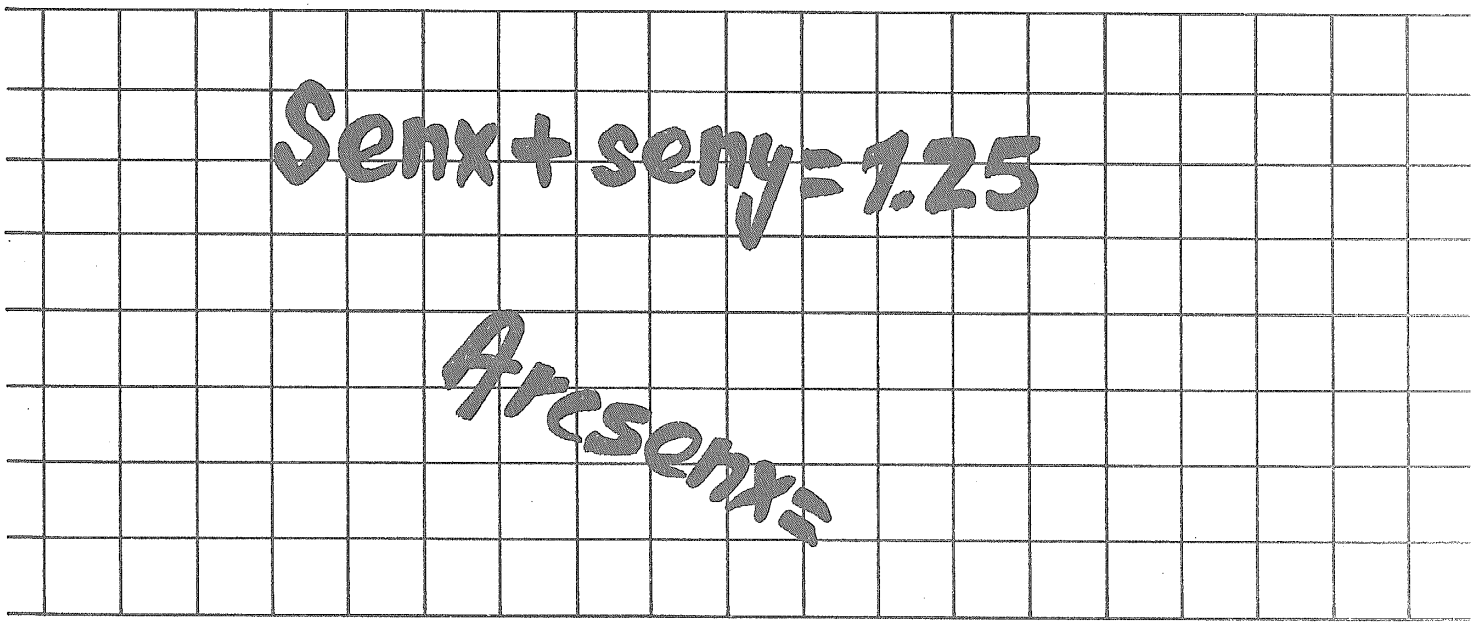
ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. El círculo trigonométrico
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

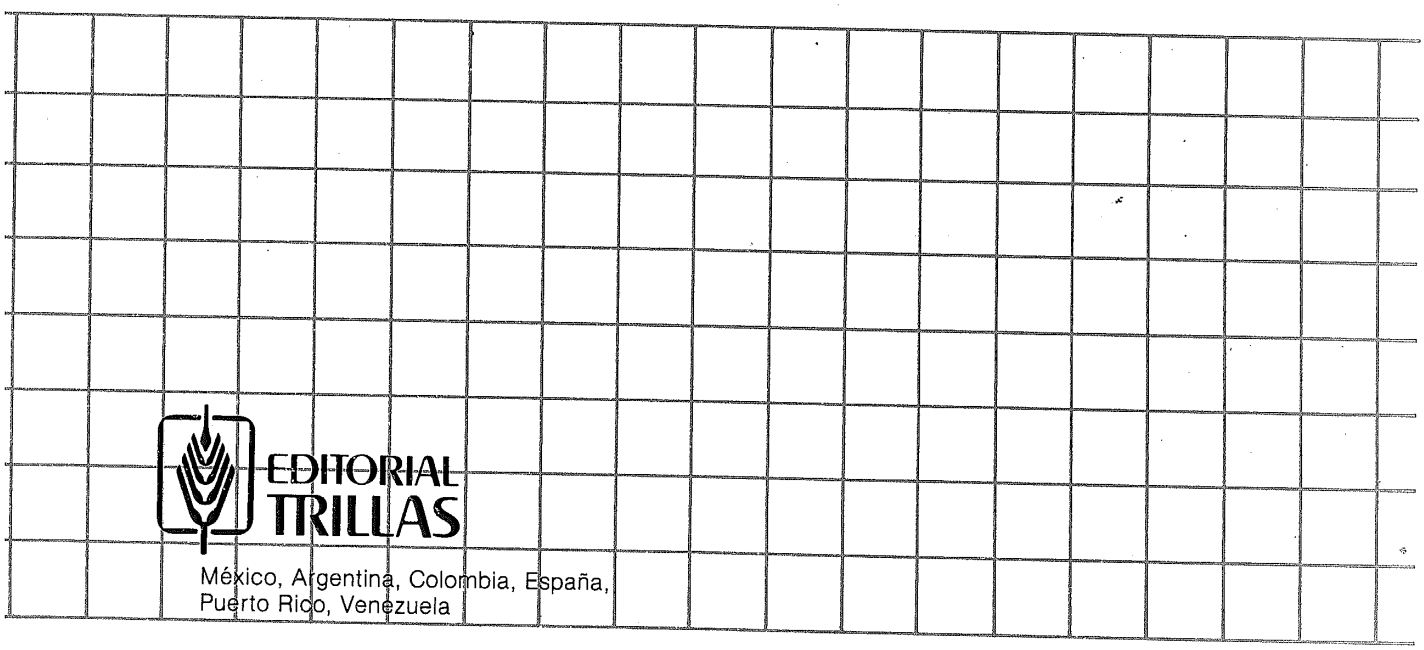
Bloque 5

Trigonometría

Módulo 8

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Conrado Flores García



EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0847-4

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

8.1 Dominio y satisfactores de una ecuación trigonométrica 9

8.2 Ecuaciones de la forma: $f_t(x) = a$, con $a \in \mathcal{R}$ 27

8.3 Ecuaciones de la forma: $f_t[f(x)] = a$, con $a \in \mathcal{R}$ 39

8.4 Ecuaciones que pueden ser llevadas a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones algebraicas 53

8.5 Ecuaciones trigonométricas que pueden ser llevadas a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones trigonométricas 58

8.6 Ecuaciones de la forma $A \cdot B = 0$, en que A y B son expresiones trigonométricas 68

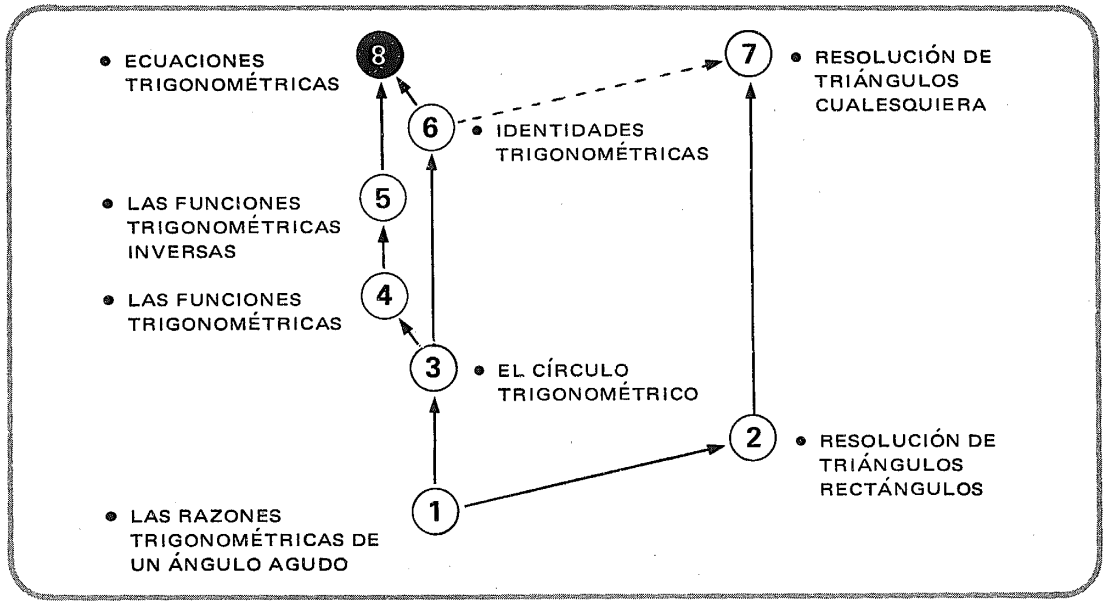
8.7 Ecuaciones conteniendo funciones trigonométricas inversas 77

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 8. Ecuaciones trigonométricas

Objetivos: resolver ecuaciones trigonométricas sencillas

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Concepto de ecuación	2	1
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2
• Relación y función (concepto y elementos)	2	7, 8
• Las razones trigonométricas de un ángulo agudo	5	1
• El círculo trigonométrico	5	3
• Las funciones trigonométricas directas e inversas	5	4, 5
• Identidades trigonométricas	5	6

8.1

Dominio y satisfactores
de una ecuación trigonométrica

1

Hemos visto que el
conjunto solución
de una **identidad**
es **igual a su dominio.**

2

En cambio, el
conjunto solución de
una **ecuación condicional**
o simplemente **ecuación,**
es un **subconjunto propio**
de su dominio.

3

Una **ecuación** que contiene funciones trigonométricas (directas y/o inversas) de números indeterminados se denomina

ecuación trigonométrica.

4

Señalar las ecuaciones trigonométricas, en el siguiente conjunto de expresiones.

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $2\operatorname{sen} x + 3 = 4.75$
3. $\tan 2x = 14$
4. $x \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + 5 = \cos \frac{\pi}{3}$
5. $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
6. $\operatorname{Arcsen} x = 5$
7. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1.25$

2. $2 \operatorname{sen} x + 3 = 4.75$

3. $\tan 2x = 14$

6. $\operatorname{Arcsen} x = 5$

7. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1.25$

5

Recordemos que **dominio** de una ecuación es el conjunto de sustitutos permisibles para las variables o indeterminadas.

6

Si el universo considerado es el conjunto de los números reales $\Omega = \mathcal{R}$, el dominio de una ecuación será el subconjunto de $\mathcal{R}$ para el que ambos miembros de la ecuación estén definidos.

7

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$3 \operatorname{sen} x + 1 = \frac{5}{2}$$

es [ ]

porque:

el primer miembro está definido para toda $x \in$ [ ]

y el segundo miembro: $\frac{5}{2} \in$ [ ]

- $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ { para toda $x \in \mathcal{R}$, sen x es un número real y 3 sen x + 1 es también un número real.
- $\mathcal{R}$

8

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\cos^2 x = \frac{2}{3}$$

es [ ]

porque:

[ ]

- $\mathcal{R}$
- el primer miembro está definido para toda $x \in \mathcal{R}$ y $\frac{2}{3} \in \mathcal{R}$

9

$\Omega = \mathbb{R}$

El dominio de la ecuación

sen x + 1 = cos x

es [ ]

porque:

[ ]

- $\mathbb{R}$
- el primer miembro está definido para toda $x \in \mathbb{R}$ y el segundo miembro está también definido para toda $x \in \mathbb{R}$.

10

$\Omega = \mathbb{R}$

El dominio de la ecuación

tan x = 1 − cos x

es [ ]

porque:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

Debemos recordar que cuando interviene mas de una función trigonométrica, el dominio de la expresión es la **intersección** de los dominios de las funciones involucradas

- $\left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\ \pi/2 \right\} k \in \mathbb{Z}$

el primer miembro está definido para toda x tal que:

- $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\ \pi/2 \quad k \in \mathbb{Z}$ y

el segundo miembro está definido para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\ \pi/2 \right\} \cap \mathbb{R} =$$
$$= \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\ \pi/2 \right\} k \in \mathbb{Z}$$

11

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\cot x + 3 = \operatorname{sen}(x + 2)$$

es ⌊_____⌋

porque:

⌊_____⌋

- $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi\} k \in \mathbb{Z}$
- el primer miembro está definido para toda x tal que $x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

  y

  el segundo miembro está definido para toda $x \in \mathcal{R}$, luego:

  $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi\} \cap \mathcal{R}$

  $= \{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi\} \; k \in \mathbb{Z}$

12

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\sec x - 1 = 10$$

es ⌊_____⌋

porque:

- $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\}$ $k \in \mathbb{Z}$
- el primer miembro está definido para toda x tal que $x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

  y

  $10 \in \mathcal{R}$

13

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$1 + \tan x = \operatorname{cosec} x$$

es ⌊_____⌋

porque:

⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente.

- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2}\right\} k \in \mathbb{Z}$
- el primer miembro está definido para toda x, tal que

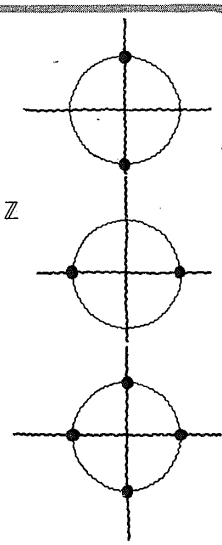
  $x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\,\pi/2; k \in \mathbb{Z}$

  el segundo miembro está definido para toda x, tal que

  $x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

  y

  $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\,\pi/2\}$
  $\cap\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq k\pi\}$
  $=\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2}\} k \in \mathbb{Z}$



14

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$2 \cos x + \tan x = 3$

es

$\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$
$k \in \mathbb{Z}$

15

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}$

es

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

16

$\Omega = \mathbb{R}$

El dominio de la ecuación

$$\arccos x + 2 = 3.5$$

es ⌊_____⌋

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

17

$\Omega = \mathbb{R}$

El dominio de la ecuación

$$3 \arctan x + 10 = 0$$

es ⌊_____⌋

$\mathbb{R}$

18

$\Omega = \mathbb{R}$

El dominio de la ecuación

$$\operatorname{arccot} x + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

es ⌊_____⌋

$\mathbb{R}$

19

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

arcsen x + 30° = 127°

es ⌊_____⌋

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \notin (-1, 1)\}$

20

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

2.784526 = arccosec x

es ⌊_____⌋

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \notin (-1, 1)\}$

21

¡Atención!

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

3 Sen x + 2 = 4

es ⌊_____⌋

Recordar que con **Sen x** nos referimos a la función seno restringida o biyección seno.

$\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

22

¡Atención!

$\Omega = \mathcal{R}$

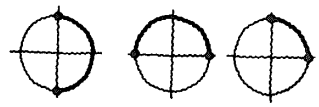
el dominio de la ecuación

2 Cos x + 3 Sen x = 1

es _____

dominio de Sen x — dominio de Cos x

$[-\pi/2, \pi/2] \cap [0, \pi] = [0, \pi/2]$



- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

23

$\Omega = \mathcal{R}$

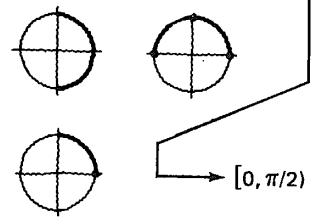
El dominio de una ecuación

1 + Tan x = Sec x

es _____

dominio de Tan x — dominio de Sec x

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left\{\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\} =$



$[0, \pi/2)$

- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right\}$

24

$\Omega = \mathcal{R}$

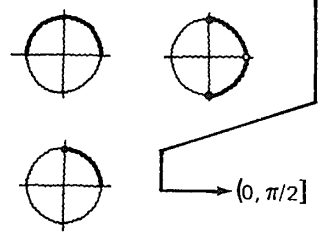
El dominio de una ecuación

3 Cot x + 5 = Cosec x

es _____

dominio de Cot x — dominio de Cosec x

$(0, \pi) \cap \left\{\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, \pi/2]\right\} =$



$(0, \pi/2]$

- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

25

¡Atención!

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

Arcsen x + 1 = Arccos x

es ⌊_____⌋

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

26

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

2 Arcsec x + 3 = 3 Arccosec x + 2

es ⌊_____⌋

dominio de Arcsec x ↓

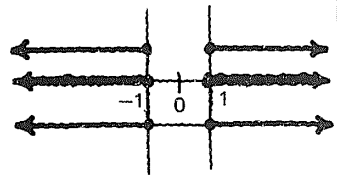
$\{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$

dominio de Arccosec x ↓

$\cap \{(-\infty, -1,] \cup [1, +\infty)\}$

$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

• $\{x/x \in \mathcal{R} \wedge (x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1)\}$



5.8.1.1

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

27

$\Omega = \mathcal{R}$

Ahora bien,

el dominio de la ecuación

$$2 \operatorname{sen} 5x = 0.4752$$

es [ ]

$\mathcal{R}$

28

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\operatorname{sen} \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{5} = \sqrt{5}$$

es [ ]

$\mathcal{R}$

29

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\tan 2x = 5$$

es [ ]

Estudiar con atención.

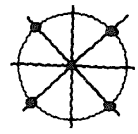
$$\left\{2x/2x \in \mathcal{R} \wedge 2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

o bien:

- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$



En efecto:

si, por ejemplo, $x = \frac{\pi}{4}$ $\quad 2x = \frac{\pi}{2}$

y $\tan \frac{\pi}{2}$ no está definida.

30

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\cot 5x = -1$$

es ⌊_____⌋

$\{5x/5x \in \mathcal{R} \wedge 5x \neq k\pi\}$

$\downarrow$

$x \neq \frac{k\pi}{5}$

o bien:

- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{5}\right\}\ k \in \mathbb{Z}$

En efecto:

si, por ejemplo, $x = 0$ $(k = 0)$
cot 0 no está definida;

si, por ejemplo, $x = \frac{\pi}{5}$ $(k = 1)$
cot π no está definida,
etcétera.

31

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$1 + \sec \frac{x}{4} = 10$$

es ⌊_____⌋

$\left\{\frac{x}{4}/\frac{x}{4} \in \mathcal{R} \wedge \frac{x}{4} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$\downarrow$

$x \neq (2k+1)\,2\pi$

- $\{x/x \in \mathcal{R} > x \neq (2k+1)\,2\pi\}$

$k \in \mathbb{Z}$

Si, por ejemplo, $x = 2\pi$ $(k = 0)$

$\sec \frac{2\pi}{4} = \sec \frac{\pi}{2}$, que no está definida.

Si, por ejemplo, $x = 6\pi$ $(k = 1)$

$\sec \frac{6\pi}{4} = \sec \frac{3\pi}{2}$, que no está definida,
etcétera.

32

$\Omega = \mathcal{R}$

El dominio de la ecuación

$$\cot (3x + 4) = 5$$

es ⌊_____⌋

$\{3x + 4/3x + 4 \in \mathcal{R}$
$\wedge\ 3x + 4 \neq k\pi\}$

$\downarrow$

$3x + 4 \neq k\pi$

$3x \neq k\pi - 4$

$x \neq \frac{k\pi - 4}{3}$

- $\left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi - 4}{3}\right\}$

$k \in \mathbb{Z}$

Si, por ejemplo, $x = -\frac{4}{3}$ $(k = 0)$

$\cot\left[3\left(-\frac{4}{3}\right) + 4\right] = \cot 0$, que no está definida.

Si, por ejemplo, $x = \frac{\pi - 4}{3}$ $(k = 1)$

$\cot\left[3\left(\frac{\pi - 4}{3}\right) + 4\right] = \cot \pi$, que no está definida.

5.8.1.2

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

33

Una solución de la ecuación trigonométrica

$$2 \text{ sen } x + 3 = 4.75 \quad x \in \mathbb{R}$$

es $x \doteq 1.065435817$ (radianes) (61.04°)
porque $1.065435817 \in \mathbb{R}$ y al ser sustituido este valor de x en la ecuación dada, resulta una **proposición cerrada verdadera.**

$$2 \text{ sen } 1.065435817 + 3 = 4.75$$

$$2x\ 0.875 + 3 = 4.75$$

$$4.75 = 4.75 \leftarrow \textbf{PCV}$$

34

2.50 no es una solución de la ecuación

$$2 \text{ sen } x + 3 = 4.75 \quad x \in \mathbb{R}$$

porque, aunque $\mathbf{2.50} \in \mathbb{R}$,
al ser sustituido ese valor de x en la ecuación, resulta una **proposición cerrada falsa.**

$$2 \text{ sen } \mathbf{2.50} + 3 = 4.75$$

$$2x\ 0.598472144 + 3 = 4.75$$

$$4.196944288 = 4.75 \leftarrow \textbf{PCF}$$

35

Señalar la opción correcta.

0 es/no es una solución de la ecuación

$$\textbf{sen } x + 1 = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

porque:

- es
- $0 \in \mathbb{R}$

y

$\text{sen}(0) + 1 = \cos(0)$

$0 + 1 = 1$

$1 = 1 \leftarrow$ PCV

36

$3\pi/2$ **es/no es** una solución de la ecuación

$$\textbf{sen } x + 1 = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

porque:

- es
- $\frac{3\pi}{2} \in \mathbb{R}$

y

$\text{sen } \frac{3\pi}{2} + 1 = \cos \frac{3\pi}{2}$

$-1 + 1 = 0$

$0 = 0 \leftarrow$ PCV

37

π **es/no es** una solución de la ecuación

$$\textbf{sen } x + 1 = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

porque:

- no es
- $\pi \in \mathbb{R}$

pero

$\text{sen } \pi + 1 = \cos \pi$

$0 + 1 = -1$

$1 = -1 \leftarrow$ **PCF**

38

15° es/no es una solución de la ecuación

$\tan 3x = 1 \qquad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\,30°;\ k \in \mathbb{Z}$

porque:

- es

- $15 \in \mathbb{R} \wedge 15 \neq (2k+1)\,30 \quad \forall\ k \in Z$

y

$\tan 3(15°) = 1$

$\tan 45° = 1$

$1 = 1 \leftarrow$ **PCV**

39

30° es/no es una solución de la ecuación

$\tan 3x = 1 \qquad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\,30°;\ k \in \mathbb{Z}$

porque:

- no es

- $30 \in \mathbb{R}$ pero

$30 = (2k+1)\,30$

para $k = 0$

40

0 es/no es una solución de la ecuación

$\text{sen } x + \cos x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

porque:

- es

- $0 \in \mathbb{R}$

y

$\text{sen}(0) + \cos(0) = 1$

$0 + 1 = 1$

$1 = 1 \leftarrow$ **PCV**

41

$\pi/2$ **es/no es** una solución de la ecuación

$$\textbf{sen x} + \textbf{cos x} = \textbf{1} \quad x \in \mathbb{R}$$

porque:

- es

- $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

  y

  $\text{sen } \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$

  $1 + 0 = 1$

  $1 = 1 \leftarrow$ **PCV**

42

π **es/no es** una solución de la ecuación

$$\textbf{sen x} + \textbf{cos x} = \textbf{1} \quad x \in \mathbb{R}$$

porque:

- no es

- $\pi \in \mathbb{R}$

  pero

  $\text{sen } \pi + \cos \pi = 1$

  $0 + (-1) = 1$

  $-1 = 1 \leftarrow$ **PCF**

43

π **es/no es** una solución de la ecuación

$$\textbf{cos 2x} + \textbf{cos 3x} = \textbf{0} \quad x \in \mathbb{R}$$

porque:

- es

- $\pi \in \mathbb{R}$

  y

  $\cos 2\pi + \cos 3\pi = 0$

  $1 + (-1) = 0$

  $0 = 0 \leftarrow$ **PCV**

44

¡Atención!

0 es/no es una solución de la ecuación

$$\textbf{Arccos x} + \textbf{Arctan x} = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1$$

porque:

_____

● es

● $0 \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant 0 \leqslant 1$

y

$\text{Arccos}(0) + \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ← PCV

45

2 es/no es una solución de la ecuación

$$\textbf{Arccos x} + \textbf{Arctan x} = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1$$

porque:

_____

● no es

● $2 \in \mathbb{R}$ pero $2 \notin [-1, 1]$

en otras palabras:

2 no es
un sustituto permisible
para la ecuación dada.

5.8.1.3

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

5.8.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el dominio de una ecuación trigonométrica dada, en el universo de los números reales;
- *determinar* si un número dado es o no solución de una ecuación trigonométrica dada.

8.2

Ecuaciones de la forma:

$f_t(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$

46

Consideremos la ecuación

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

El **conjunto solución** deberá estar formado por todos sus satisfactores y podrá representarse, por comprensión, así:

$$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge \text{sen } x = \frac{1}{2} \right\}$$

47

Sabemos que, para el intervalo $[0, 2\pi)$ los satisfactores de la ecuación:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

son:

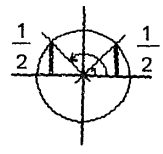
$x_1 = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

y

$x_2 = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

en grados | en radianes | en radianes (expresados en términos de π)

Siendo: sen $x > 0$



- $30^\circ = 0.523598775 = \frac{\pi}{6}$

- $\underbrace{150^\circ}_{180^\circ - 30^\circ} = 2.617993878 = \frac{5\pi}{6}$

48

$\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ son dos soluciones de la ecuación

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

porque

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in \mathbb{R}$

y

[ ]

- $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \therefore \overbrace{\frac{1}{2} = \frac{1}{2}}^{\text{PCV}}$
- $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \therefore \underbrace{\frac{1}{2} = \frac{1}{2}}_{\text{PCV}}$

49

Ahora bien, sabiendo que la función seno es periódica, con periodo p = [ ] , también serán satisfactores de la ecuación:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$\frac{\pi}{6} +$ [ ]

y

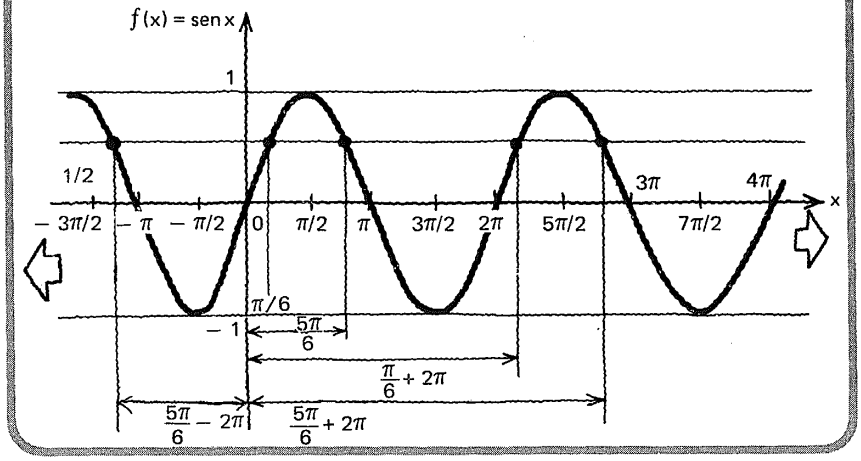
$\frac{5\pi}{6} +$ [ ]

2π

$2k\pi$
$2k\pi$
} $k \in \mathbb{Z}$

50

Estudiar con atención esta gráfica de $f(x) = \text{sen } x$



51

Podemos expresar todas las soluciones de la ecuación

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Así

$$S = \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge \text{sen } x = \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi > x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\right\}$$

$k \in \mathbb{Z}$

52

Conjunto solución de la ecuación

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

representado por enumeración de sus elementos:

$$\left\{\ldots, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \ldots\right\}$$

53

Por otro lado, sabemos que si

$$\text{sen } x = \frac{1}{2}$$

entonces

$$x = \text{arcsen } \frac{1}{2}$$

por lo tanto, podemos escribir:

$$x = \text{Arcsen } \frac{1}{2} + 2k\pi$$

ó

$$x = (\pi - \text{Arc sen } \frac{1}{2}) + 2k\pi$$

en donde: $\text{Arcsen } \frac{1}{2} =$ $\frac{\pi}{6}$

Ver cuadro resumen # 6, presentado en el módulo 5 del bloque de trigonometría.

54

Sigamos observando con atención.

$$\textbf{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \right\} =$$

$$\left\{ x/x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\frac{\pi}{6}$: $\operatorname{Arcsen} \frac{1}{2}$ ↑

$\frac{5\pi}{6}$: ↑ $\pi - \operatorname{Arcsen} \frac{1}{2}$

55

Ecuación: $\textbf{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$

Conjunto solución:

$$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

A las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$
se les llama

soluciones fundamentales.

56

Así, las

soluciones fundamentales

de la ecuación

$$\textbf{sen } x = \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

son:

$\frac{\pi}{6}$ ó $\frac{5\pi}{6}$

57

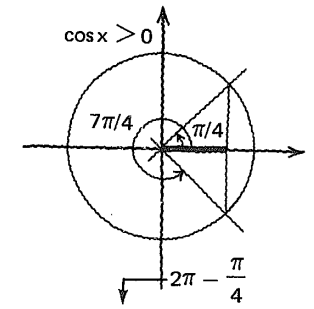
Se requiere resolver la ecuación

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Las soluciones fundamentales son:

[ ]

en radianes (expresados en términos de π)



- $\frac{\pi}{4}$ ó $\frac{7\pi}{4}$

58

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Soluciones fundamentales: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$

Todas las soluciones pueden ser expresadas así:

$x = \frac{\pi}{4} +$ [ ]

ó

$x = \frac{7\pi}{4} +$ [ ]

puesto que la función coseno es periódica con periodo p = [ ]

$2k\pi$
$2k\pi$
} $k \in \mathbb{Z}$

2π

59

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución representado por comprensión:

[ ]

$$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge \left(x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right) \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

60

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución representado por enumeración de sus elementos:

$$\left\{\ldots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \boxed{\frac{\pi}{4}}, \boxed{\frac{7\pi}{4}}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \ldots\right\}$$

soluciones fundamentales

61

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Podemos escribir las soluciones así:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ó

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

de acuerdo con el cuadro resumen #6, presentado en el módulo 5 del bloque de trigonometría.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

62

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

De aquí podemos representar el conjunto solución por enumeración de sus elementos:

comparar con la respuesta del cuadro 60.

soluciones fundamentales

$$\left\{\ldots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \boxed{\frac{\pi}{4}}, \boxed{\frac{7\pi}{4}}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \ldots\right\}$$

63

Se requiere resolver la ecuación:

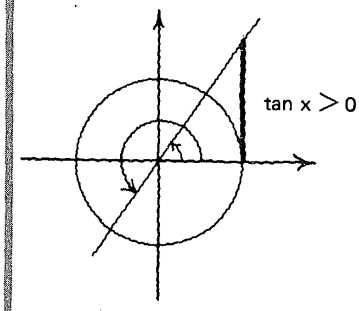
$\tan x = 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90°; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales:

[ ]

en grados



- $63° 26'$ ó $243° 26'$

$180° + 63° 26'$

64

$\tan x = 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90°; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales:

$x \doteq 63° 26'$

ó

$x \doteq 243° 26'$

Observemos que, como el periodo de la función tangente es [ ] radianes o [ ]°, expresamos todas las soluciones así:

$x \doteq 63° 26' +$ [ ]

ó

$x \doteq 243° 26' +$ [ ]

- π
- 180
- $180°k$
- $180°k$

$k \in \mathbb{Z}$

65

$\tan x = 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90°; k \in \mathbb{Z}$

Expresión para todas las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \doteq 63° 26' + 180°k \\ \text{ó} \\ x \doteq 243° 26' + 180°k \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ver cuadro siguiente.

66

Para k = 1:

$x_1 \doteq$ [ ]

ó

$x_1 \doteq$ [ ]

Para k = 2:

$x_2 \doteq$ [ ]

ó

$x_2 \doteq$ [ ]

243° 26′

423° 26′

423° 26′

603° 26′

67

$\tan x = 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90°; k \in \mathbb{Z}$

Si observamos con atención, nos damos cuenta de que todas las soluciones quedan comprendidas en la expresión:

$x \doteq 63° 26′ + 180°k \quad k \in \mathbb{Z}$

68

$\tan x = 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90°; k \in \mathbb{Z}$

Entonces, podemos escribir el conjunto solución así:

[ ]

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90° \wedge x \doteq 63° 26′ + 180°k\}$ $k \in \mathbb{Z}$

69

$\tan x = 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)90°; k \in \mathbb{Z}$

Conjunto solución dado por enumeración de sus elementos:

Respuesta en el cuadro siguiente.

Soluciones fundamentales

$S = \{\ldots, -117° 26', \mathbf{63° 26'}, 243° 26', 423° 26', \ldots\}$

El mismo resultado puede obtenerse aplicando la expresión correspondiente del cuadro-resumen 5, (estudiando en el módulo 5 de trigonometría)

70

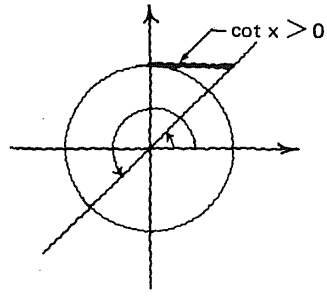
Se requiere resolver la ecuación

$\cot x = 1$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales:

en radianes (expresados en términos de π)



- $\frac{\pi}{4}$ ó $\frac{5\pi}{4}$

$\pi + \frac{\pi}{4}$

71

cot x = 1

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

ó

$$x = \frac{5\pi}{4}$$

Puesto que el periodo de la función cotangente es p = [ ] podemos expresar todas las soluciones así, de acuerdo con la experiencia adquirida en el ejemplo anterior:

$x =$ [ ]

π

$\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

72

cot x = 1

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Conjunto solución:

[ ]

por comprensión

[ ]

por enumeración de los elementos

$$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Soluciones fundamentales

$$\left\{ \ldots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \boxed{\frac{\pi}{4}}, \boxed{\frac{5\pi}{4}}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots \right\}$$

73

Se requiere resolver la ecuación:

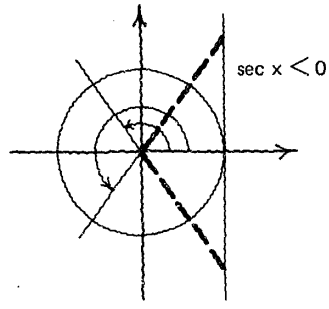
Sec x = − 2

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\,\pi/2; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales

[ ]

en radianes (expresados en términos de π)



$\frac{2\pi}{3}$ ó $\frac{4\pi}{3}$

74

Sec x = − 2

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales

$x = \frac{2\pi}{3}$

ó

$x = \frac{4\pi}{3}$

Todas las soluciones, teniendo en cuenta que el periodo de la función secante es [ ]

$x =$ [ ]

ó

$x =$ [ ]

- 2π
- $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
- $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\Big\}\ k \in \mathbb{Z}$

75

Sec x = − 2

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Conjunto solución:

[ ]

por comprensión

[ ]

por enumeración

- $\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right.$

$\wedge \left(x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right.$

$\left.\vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\Big\}$

$k \in \mathbb{Z}$

- $\left\{\ldots, -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \boxed{\frac{2\pi}{3}}, \boxed{\frac{4\pi}{3}}\right.$

$\left.\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}\ldots\right\}$

Soluciones fundamentales

76

Se requiere resolver la ecuación

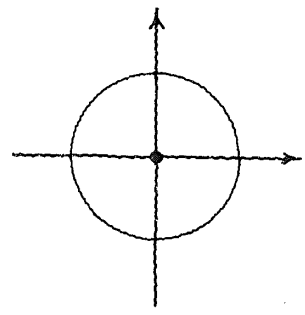
cosec x = 0

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (k\pi); k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales:

[ ]

en radiares (expresados en términos de π)



no hay solución

↓

no hay ningún valor de x para el cual cosec x = 0

5.8.2.1

Práctica adicional de determinación del conjunto solución de ecuaciones trigonométricas de la forma: $f_t(x) = a$; con $a \in \mathbb{R}$, si se considera necesario.

5.8.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el conjunto solución de una ecuación trigonométrica de la forma: $f_t(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

8.3

Ecuaciones de la forma
$f_t[f(x)] = a$, con $a \in \mathcal{R}$

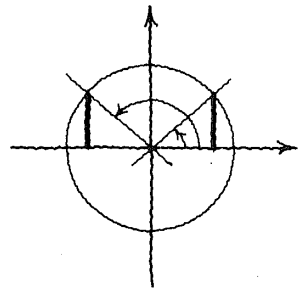
77

Se requiere resolver la ecuación

$$\text{sen } 2x = 0.475$$
$$x \in \mathcal{R}$$

Empecemos por resolver para **2x**.
Soluciones fundamentales para 2x:

$$\underline{\qquad\qquad}$$
en grados



$28° 22'$ ó $151° 38'$

78

$$\text{sen } 2x = 0.475$$
$$x \in \mathcal{R}$$

Soluciones fundamentales para 2x:

$2x = 28° 22'$

ó

$2x \doteq 151° 38'$

Todas las soluciones para **2x**:

$2x \doteq \underline{\qquad\qquad}$

ó

$2x \doteq \underline{\qquad\qquad}$

$28° 22' + 360°k$
$151° 38' + 360°k$
$\Big\}\ k \in \mathbb{Z}$

79

sen 2x = 0.475
$x \in \mathbb{R}$

$2x \doteq 28° 22' + 360°k$

ó

$2x \doteq 151° 38' + 360°k$

$k \in \mathbb{Z}$

Las soluciones para **x** quedarán expresadas así:

$x \doteq$ ⌊_____⌋

ó

$x \doteq$ ⌊_____⌋

$k \in \mathbb{Z}$

Atención.

$14° 11' + 180°k$

$15° 49' + 180°k$

80

sen 2x = 0.475
$x \in \mathbb{R}$

Conjunto solución

⌊_____⌋

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge (x \doteq 14° 11' + 180°k \vee x \doteq 75° 49' + 180°k)\}$
$k \in \mathbb{Z}$

81

sen 2x = 0.475
$x \in \mathbb{R}$

Verificación.

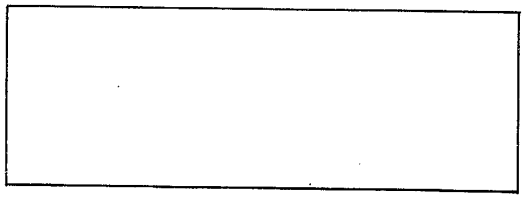
Por ejemplo, para $x \doteq 14° 11'$:

$\text{sen } 2(14° 11') = 0.475$
$\text{sen } 28° 22' = 0.475$
$0.475712369 = 0.475$ ◄ **PCV**

82

$\text{sen } 2x = 0.475$
$x \in \mathcal{R}$

Para $x = 75° 49'$:



$\text{sen } 2(75° 49') = 0.475$
$\text{sen } 151° 38' = 0.475$
$0.475112369 \doteq 0.475$

PCV

83

Necesitamos resolver esta otra ecuación:

$\tan 5x = 10$
$x \in$ ⌊_____⌋

Escribamos antes, su dominio.

$\mathcal{R} \wedge 5x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

o bien:

$\mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{10}$
$k \in \mathbb{Z}$

84

$\tan 5x = 10$
$x \in \mathcal{R} \wedge x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$

Soluciones fundamentales para $5x$:

$5x \doteq$ ⌊_____⌋
ó
$5x \doteq$ ⌊_____⌋

} en radianes con 4 cifras decimales

1.4711

4.6127 $(1.4711 + \pi)$

85

$\tan 5x = 10$
$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$

Todas las soluciones para $5x$:

$5x \doteq$ [ ]

$1.4711 + k\pi$

o bien:

$1.4711 + 3.1416k$
$k \in \mathbb{Z}$

86

$\tan 5x = 10$
$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$

$5x \doteq 1.4711 + 3.1416k$

Para x:

$x \doteq$ [ ]

$0.2942 + 0.6283k$
$k \in \mathbb{Z}$

87

$\tan 5x = 10$
$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$

$x \doteq 0.2942 + 0.6283k \qquad k \in \mathbb{Z}$

Verificación para $k = 0$

$\tan 5(0.2942) = 10$
$\tan 1.471 = 10$
$9.9871 = 10$ ◀ PCV

88

Se requiere resolver

$$\cos(3x + 2) = \frac{3}{4}$$

$x \in \mathbb{R}$

Soluciones fundamentales para $3x + 2$:

$3x + 2 \doteq$ ┌──────┐

ó

$3x + 2 \doteq$ ┌──────┐

} en radianes con 4 cifras decimales

0.7227

5.5605

$2\pi - 0.7227$

89

$$\cos(3x + 2) = \frac{3}{4}$$

$x \in \mathbb{R}$

$3x + 2 \doteq 0.7227$

ó

$3x + 2 \doteq 5.5605$

Todas las soluciones para $3x + 2$:

┌──────┐

ó

┌──────┐

$3x+2 = 0.7227+6.2832\,k$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$3x+2 = 5.5605+6.2832\,k$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

90

$$\cos(3x + 2) = \frac{3}{4}$$

$x \in \mathbb{R}$

$3x + 2 \doteq 0.7227 + 6.2832\,k$

ó

$3x + 2 \doteq 5.5605 + 6.2832\,k$

Todas las soluciones para x:

$x \doteq$ ┌──────┐

ó

$x \doteq$ ┌──────┐

$3x + 2 \doteq 0.7227 + 6.2832\,k$

$3x \doteq 0.7227 + 6.2832\,k - 2$

$3x \doteq -1.2773 + 6.2832\,k$

$x \doteq \dfrac{-1.2773 + 6.2832\,k}{3}$

↓

$-0.4258 + 2.0944\,k$

de manera similar:

$1.1868 + 2.0944\,k$

} $k \in \mathbb{Z}$

91

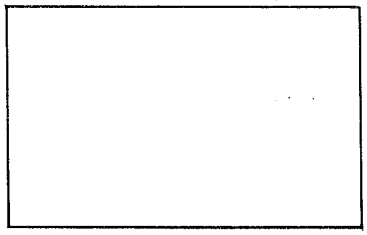
$$\cos(3x + 2) = \frac{3}{4}$$

$x \in \mathbb{R}$

La solución:

$$\left.\begin{array}{l} x \doteq -0.4258 + 2.0944\,k \\ \text{ó} \\ x \doteq 1.1868 + 2.0944\,k \end{array}\right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

Verificación para $k = 0$



$$\cos[3(-0.4258) + 2] = \frac{3}{4}$$

$$\cos 0.7226 = \frac{3}{4}$$

$0.7500888 \doteq 0.75$ ◀ PCV

ó

$$\cos[3(1.1868) + 2] = \frac{3}{4}$$

$$\cos 5.5604 = \frac{3}{4}$$

$0.74996678 \doteq 0.75$ ◀ PCV

92

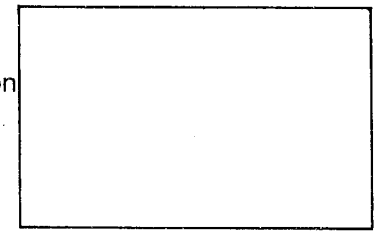
$$\cos(3x + 2) = \frac{3}{4}$$

$x \in \mathbb{R}$

La solución:

$$\left.\begin{array}{l} x \doteq -0.4258 + 2.0944\,k \\ \text{ó} \\ x \doteq 1.1868 + 2.0944\,k \end{array}\right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

Verificación para $k = 1$



$$\cos[3(-0.4258 + 2.0944) + 2] = \frac{3}{4}$$

$$\cos 7.0058 = \frac{3}{4}$$

$0.75007875 \doteq 0.75$

▲ PCV

ó

$$\cos[3(1.1868 + 2.0944) + 2] = \frac{3}{4}$$

$$\cos 11.8436 = \frac{3}{4}$$

$0.74997602 \doteq 0.75$

▲ PCV

93

Se requiere resolver

$$\tan\left(\frac{x - 1}{2}\right) = 4$$

$x \in$ ____

$$\frac{x - 1}{2} \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$x - 1 \neq (2k + 1)\pi$$

$$x \neq (2k + 1)\pi + 1$$

$\mathbb{R} \wedge x \neq (2k + 1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

94

$$\tan\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

Solución "fundamentalísima" para $\frac{x-1}{2}$:

$\frac{x-1}{2} \doteq$ [ ]

en radianes
con 4 cifras
decimales

1.3258

95

$$\tan\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{x-1}{2} \doteq 1.3258$$

Todas las soluciones para $\frac{x-1}{2}$:

[ ]

$\frac{x-1}{2} \doteq 1.3258 + 3.1416\ k$

96

$$\tan\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{x-1}{2} \doteq 1.3258 + 3.1416\ k$$

Todas las soluciones para x:

$x \doteq$ [ ]

$\frac{x-1}{2} \doteq 1.3258 + 3.1416\ k$

$x - 1 = 2(1.3258 + 3.1416\ k)$
$x - 1 = 2.6516 + 6.2832\ k$
$x = 2.6516 + 6.2832\ k + 1$

↓

● $3.6516 + 6.2832\ k$

97

$$\tan\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

Las soluciones:

$$x \doteq 3.6516 + 6.2832\,k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

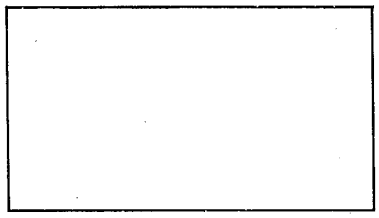
98

$$\tan\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

$$x \doteq 3.6516 + 6.2832\,k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Verificación para $k = 0$



$$\tan\left(\frac{3.6516 - 1}{2}\right) = 4$$

$\tan 1.3258 = 4$

$3.9996984 \doteq 4$ ◀ PCV

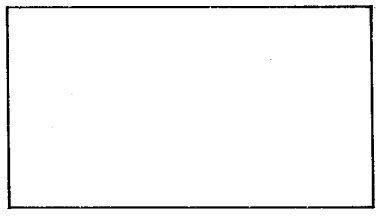
99

$$\tan\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\pi + 1;\ k \in \mathbb{Z}$

$$x \doteq 3.6516 + 6.2832\,k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Verificación para $k = 1$



$$\tan\left(\frac{3.6516 + 6.2832 - 1}{2}\right) = 4$$

$\tan 4.4674 = 4$

$3.9998349 = 4$

▲ PCV

100

Se requiere resolver

$$\tan (x^2 + 2) = 0$$

$x \in$ ____

$x^2 + 2 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

$x^2 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} - 2$

$x \neq \pm \sqrt{(2k + 1)\frac{\pi}{2} - 2}$

$x \neq \pm \sqrt{\frac{(2k + 1)\pi - 4}{2}}$

- $\mathbb{R} \wedge x \neq \pm \sqrt{\frac{(2k + 1)\pi - 4}{2}}$

101

$$\tan (x^2 + 2) = 0$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \pm \sqrt{\frac{(2k + 1)\pi - 4}{2}}; k \in \mathbb{Z}$

Todas las soluciones para $x^2 + 2$:

$x^2 + 2 \doteq$ ____

en radianes, expresados en términos de π.

$0 + k\pi = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

102

$$\tan (x^2 + 2) = 0$$

$x^2 + 2 = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$x =$ ____

Atención:

$x^2 = k\pi - 2$

$\pm \sqrt{k\pi - 2}$

$k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 1$

la expresión $\pm \sqrt{k\pi - 2}$ no se define para $k < 1$

103

$$\tan (x^2 + 2) = 0$$

Las soluciones:

$$x = \pm\sqrt{k\pi - 2} \qquad k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 1$$

Verificación para $k = 1$

$$\tan\left(\sqrt{\pi - 2}\right)^2 + 2 = 0$$
$$\tan (\pi - 2 + 2) = 0$$
$$\tan \pi = 0$$
$$0 = 0$$

▲ PCV

104

Podemos bosquejar el siguiente procedimiento para resolver una ecuación trigonométrica de la forma:

$$f_t[f(x)] = a$$

en que f_t representa una de las seis funciones trigonométricas y $f(x)$ una función algebraica:

1. determinar las soluciones fundamentales para $f(x)$, expresándolas como una ecuación (para las funciones tangente y cotangente) o como dos ecuaciones (para las demás funciones) de la forma: $f(x) = m$;
2. determinar todas las soluciones para $f(x)$, expresándolas como una o dos ecuaciones de la forma:

   $$f(x) = m + kp$$

   en que p es el periodo de la función trigonométrica considerada, y $k \in \mathbb{Z}$;
3. resolver para x las ecuaciones resultantes, y si el dominio de x está restringido, seleccionar los valores de x dentro del intervalo dado;
4. Comprobar los resultados obtenidos.

105

Ejemplo.

Resolver la ecuación

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

Una inspección del dominio nos indica que las soluciones requeridas son las

[_____]

fundamentales

106

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

En esta ecuación:

$f(x) =$ [_____]

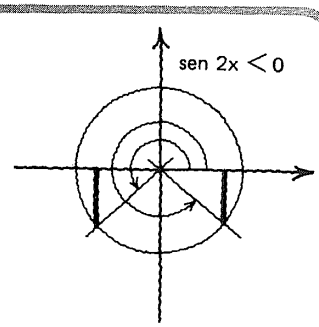
2x

107

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

1. Soluciones fundamentales para $f(x) = 2x$:

[_____]



- $2x = \frac{4\pi}{3}$

ó

- $2x = \frac{5\pi}{3}$

108

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

$$2x = \frac{4\pi}{3}$$

ó

$$2x = \frac{5\pi}{3}$$

2. Todas las soluciones para $f(x) = 2x$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

109

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

$$\left.\begin{array}{l} 2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

3.1. Resolver para x las ecuaciones resultantes:

$$\left.\begin{array}{l} x = \_\_\_\_\_ \\ \text{ó} \\ x = \_\_\_\_\_ \end{array}\right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\frac{5\pi}{6} + k\pi$$

110

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \\ \text{ó} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

3.2. Seleccionar los valores de x dentro del intervalo $[0, 2\pi)$.

Para k = 0:

$x = \dfrac{2\pi}{3} \quad \left(\dfrac{2\pi}{3} < 2\pi\right)$

$x = \dfrac{5\pi}{6} \quad \left(\dfrac{5\pi}{6} < 2\pi\right)$

Para k = 1:

$x = \dfrac{5\pi}{3} \quad \left(\dfrac{5\pi}{3} < 2\pi\right)$

$x = \dfrac{11\pi}{6} \quad \left(\dfrac{11\pi}{6} < 2\pi\right)$

Para k = 2, → ALTO

$x = \dfrac{8\pi}{3} \quad \left(\dfrac{8\pi}{3} > 2\pi\right)$

111

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

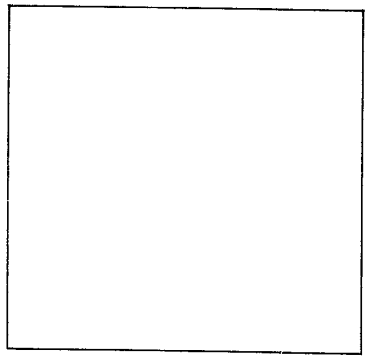
Conjunto solución:

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

112

$$\text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

4. Comprobación de los resultados obtenidos



$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq -0.8660254$$

$$\text{sen}\left[2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -0.8660254$$
$$-0.8660254 = -0.8660254$$
PCV

$$\text{sen}\left[2\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -0.8660254$$
$$-0.8660254 = -0.8660254$$
PCV

etcétera.

5.8.3.1

Práctica adicional de resolución de ecuaciones trigonométricas de la forma $f_t[f(x)] = a$, si se considera necesario.

5.8.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el conjunto solución de una ecuación trigonométrica dada de la forma: $f_t[f(x)] = a$, con $a \in \mathbb{R}$, y f representando una función algebraica.

8.4

Ecuaciones que pueden ser llevadas a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones algebraicas

113

Se requiere resolver la ecuación

$$5 \operatorname{sen} x + 4 = 6$$
$$x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

Ecuación equivalente de la forma $f_t(x) = a$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{5} = 0.4$$

114

$$5 \operatorname{sen} x + 4 = 6$$
$$x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

Ecuación equivalente de la forma $f_t(x) = a$

$$\operatorname{sen} x = 0.4$$

Solución de esta última ecuación:

soluciones fundamentales:

$x \doteq$

$x \doteq 0.4115$

ó

$x \doteq$

$x \doteq 2.7301 \quad (\pi - 0.4115)$

115

5 sen x + 4 = 6
$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

x ≐ 0.4115

ó

x ≐ 2.7301

Verificación:

5sen 0.4115 + 4 = 6
5 × 0.4 + 4 = 6
6 = 6◀PCV

5sen 2.7301 + 4 = 6
5 × 0.4 + 4 = 6
6 = 6◀PCV

116

Se requiere resolver

0.45 + 0.71 cos x = 3 cos x + 2.74
$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

Ecuación equivalente
de la forma $f_t(x) = a$

0.71 cos x − 3 cos x
= 2.74 − 0.45
− 2.29 cos x = 2.29
cos x = − 1

117

0.45 + 0.71 cos x = 3 cos x + 2.74
$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

Ecuación equivalente
de la forma $f_t(x) = a$

cos x = − 1

Solución de esta
última ecuación

x =

ó

x =

Solución fundamental

π

π

118

$$0.45 + 0.71 \cos x = 3 \cos x + 2.74$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

La solución

$$x = \pi$$

Verificación.

$0.45 + 0.71 \cos \pi = 3 \cos \pi + 2.74$
$0.45 + 0.71 \times (-1) = 3(-1) + 2.74$
$0.45 - 0.71 = -3 + 2.74$
$-0.26 = 0.26$ ◀ **PCV**

119

Se requiere resolver

$$1 + \tan 3x = \frac{3}{4} \tan 3x - 2$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi \wedge x \notin \{ \quad \}$$

Enumerar los elementos del conjunto de valores de x para los que no se define tan 3x, en el intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

$$3x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{6}$$

$k = 0 \longrightarrow \pi/6$
$k = 1 \longrightarrow \pi/2$
$k = 2 \longrightarrow 5\pi/6$
$k = 3 \longrightarrow 7\pi/6$
$k = 4 \longrightarrow 3\pi/2$
$k = 5 \longrightarrow 11\pi/6$
$k = 6 \longrightarrow 13\pi/6$
y $13\pi/6 > 2\pi$

ALTO

120

$$1 + \tan 3x = \frac{3}{4} \tan 3x - 2$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi \wedge x \notin \{\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6\}$$

Ecuación equivalente de la forma:

$$f_t[f(x)] = a$$

$$\tan 3x - \frac{3}{4} \tan 3x = -3$$

$$\frac{1}{4} \tan 3x = -3$$

$$\tan 3x = -12$$

121

$$1 + \tan 3x = \frac{3}{4}\tan 3x - 2$$

Ecuación equivalente de la forma: $f_t[f(x)] = a$ obtenida mediante transformaciones algebraicas: $\tan 3x = -12$

Resolver esta última ecuación

$x \doteq$

$3x \doteq 1.6539 + 3.1416\,k$

$x \doteq \dfrac{1.6539 + 3.1416\,k}{3}$

• $x \doteq 0.5513 + 1.0472\,k;\ k \in \mathbb{Z}$

2π

$k = 0 \longrightarrow x \doteq 0.5513 < 6.2832$
$k = 1 \longrightarrow x \doteq 1.5985 < 6.2832$
$k = 2 \longrightarrow x \doteq 2.6457 < 6.2832$
$k = 3 \longrightarrow x \doteq 3.6929 < 6.2832$
$k = 4 \longrightarrow x \doteq 4.7401 < 6.2832$
$k = 5 \longrightarrow x \doteq 5.7873 < 6.2832$

$k = 6 \qquad x \doteq 6.8345 > 6.2832$

ALTO

122

$$1 + \tan 3x = \frac{3}{4}\tan 3x - 2$$

Conjunto solución

$$S = \{0.5513, 1.5985, 2.6457, 3.6929, 4.7401, 5.7873\}$$

Verificación:

Respuesta en el cuadro siguiente.

Para $x \doteq 0.5513$

$1 + \tan 3(0.5513) = \frac{3}{4}\tan 3(.5513) - 2$

$1 + \tan 1.6539 = 0.75 \tan 1.6539 - 2$
$1 + (-12) = 0.75(-12) - 2$
$-11 = -9 - 2$
$-11 = -11$ ◄ PCV

o

Para $x \doteq 1.5985$

$1 + \tan 4.7955 = 0.75 \tan 4.7955 - 2$
$1 + (-12) = 0.75(-12) - 2$
$-11 = -11$ ◄ PCV

etcétera.

5.8.4.1

Práctica adicional de resolución de ecuaciones trigonométricas que pueden ser llevadas a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones algebraicas sencillas,
si se considera necesario.

5.8.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el conjunto solución de ecuaciones trigonométricas que pueden ser transformadas en ecuaciones equivalentes de alguna de las formas:

  $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$

  mediante operaciones algebraicas sencillas.

8.5

Ecuaciones trigonométricas que pueden ser llevadas a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones trigonométricas

123

Se requiere resolver la ecuación

$$\textbf{sen } x + 2 \cos x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Intentemos transformar la ecuación dada en una ecuación equivalente de la forma $f_t(x) = a$.
Necesitamos, por ejemplo, expresar cos x en términos de sen x.

$\cos x =$ [ ]

$\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$

124

sen x + 2 cos x = 1

$x \in \mathbb{R}$

$\text{sen } x - 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1$ | [ ]

Ecuaciones equivalentes expresadas en términos de sen x como única función trigonométrica.

sen x + $2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$ = 1

125

Atención

$$\boxed{\text{sen } x + 2\cos x = 1}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{sen } x + 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1} \qquad \boxed{\text{sen } x - 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1}$$

sen x = ____ ← ecuación o ecuaciones de la forma $f_t(x) = a$

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención

elevando al cuadrado ambos miembros: →

resolviendo esta ecuación cuadrática para sen x: →

$$2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 - \text{sen } x$$

$$4(1 - \text{sen}^2 x) = (1 - \text{sen } x)^2$$

$$4 - 4\,\text{sen}^2 x = 1 - 2\,\text{sen } x + \text{sen}^2 x$$

$$5\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen } x - 3 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10}$$

$$\text{sen } x = \frac{2 \pm 8}{10}$$

- **sen x = 1**

  ó

- **sen x = − 0.6**

126

$$\boxed{\text{sen } x + 2\cos x = 1}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{sen } x + 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1} \qquad \boxed{\text{sen } x - 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1}$$

sen x = 1
ó
sen x = − 0.6

sen x =

Estudiar con atención.

$$-2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 - \text{sen } x$$

elevando al cuadro ambos miembros:

$$4(1 - \text{sen}^2 x) = (1 - \text{sen } x)^2$$

- sen x = 1

  ó

- sen x = − 0.6

127

$$\text{sen } x + 2\cos x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

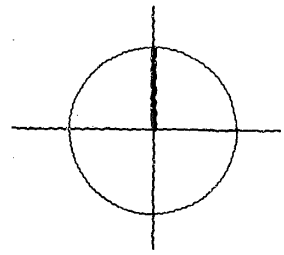
$$\text{sen } x + 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 \qquad \text{sen } x - 2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1$$

$$\text{sen } x = 1 \quad ① \qquad \text{ó} \qquad \text{sen } x = -0.6 \quad ②$$

Resolvamos ahora estas últimas dos ecuaciones.

De la ecuación ①

$x =$ ____



$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

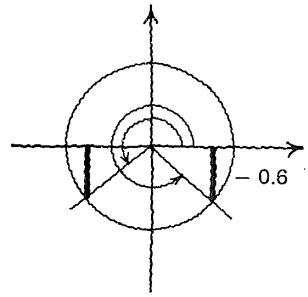
128

De la ecuación ② (sen $x = -0.6$):

$x \doteq$ ____

ó

$x \doteq$ ____



$$\left.\begin{array}{l} 3.7062 + 2k\pi \\ \\ 5.6397 + 2k\pi \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

129

Verificación para $k = 0$

$$\text{sen } x + 2\cos x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x \doteq 3.7062 + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x \doteq 5.6397 + 2k\pi \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

¡Atención!

- $\text{sen } \frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} = 1$

$1 + 2 \cdot 0 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 = 1$ ◀ PCV

ó

- $\text{sen } 3.7062 + 2\cos 3.7062 = 1$
$-0.53508388 - 1.6895978 = 1$
$-2.2246816 = 1$
▲ PCF

ó

- $\text{sen } 5.6397 + 2\cos 5.6397 = 1$
$-0.6 + 2 \times 0.8 = 1$
$-0.6 + 1.6 = 1$
$1 = 1$
▲ PCV

130

$$\text{sen } x + 2\cos x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ \cancel{x \doteq 3.7062 + 2k\pi} \\ \text{ó} \\ x \doteq 5.6397 + 2k\pi \end{array}\right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

Observemos este hecho curioso:

$x \doteq 3.7062$ y por lo tanto: $x \doteq 3.7062 + 2k\pi$ no satisfacen la ecuación original, es decir, **no son soluciones de la ecuación sen x + 2 cos x = 1.**

131

Recordemos que,
el elevar al cuadrado los
dos miembros de una ecuación
—en este caso para suprimir radicales—

no siempre

da origen a una ecuación

equivalente.

132

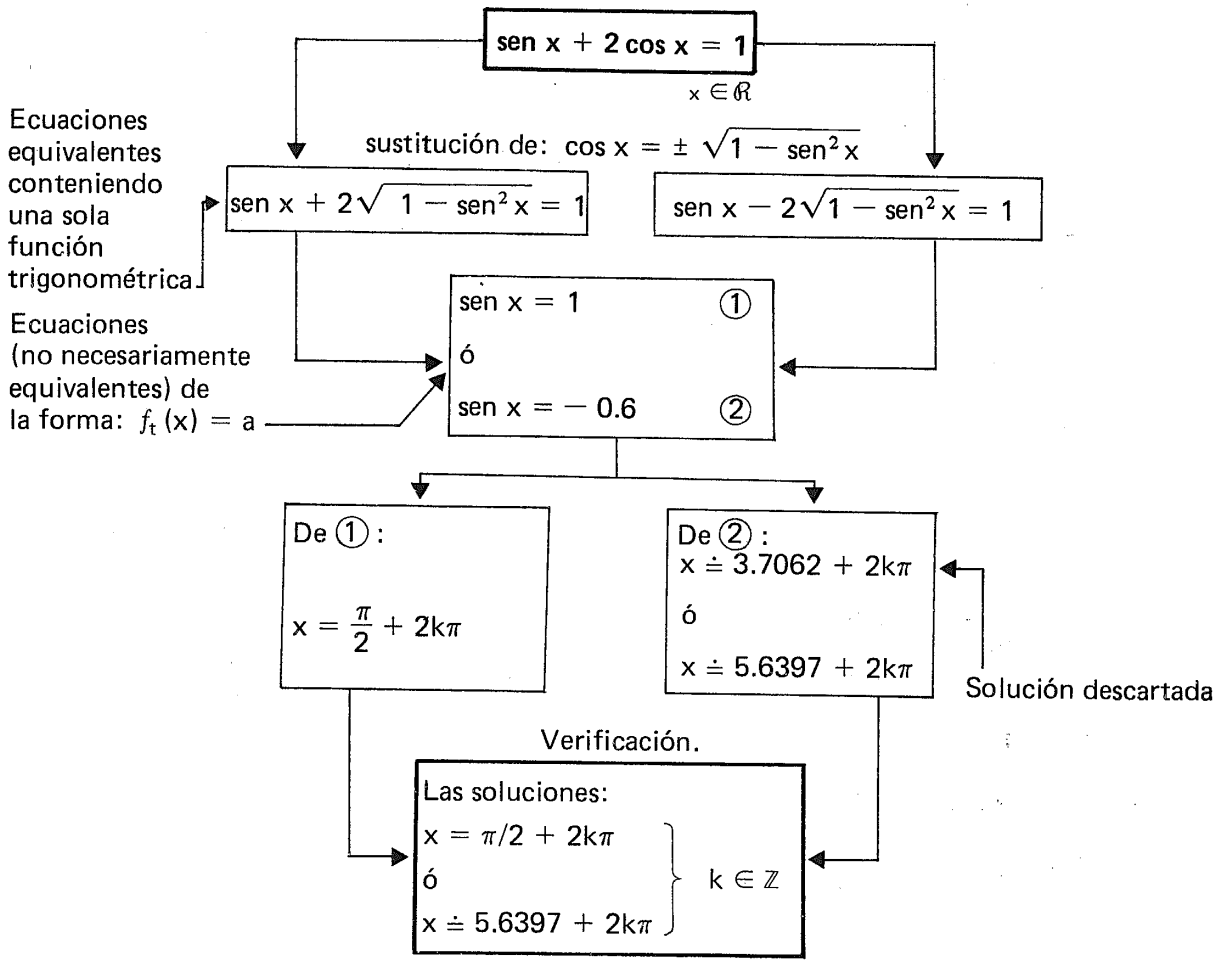
Se pone de manifiesto, la

importancia de verificar
los resultados obtenidos,

por sustitución de estos
en la ecuación original.

133

Estudiar con atención este procedimiento de solución (que no es el único posible para este tipo de ecuaciones).



134

Señalar la opción correcta.

Se requiere resolver:

$$\sec x - 1 = \tan x$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi \wedge x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Se piden
- **todas las soluciones**
- **únicamente las soluciones fundamentales**

únicamente las soluciones fundamentales.

135

$$\sec x - 1 = \tan x$$

Sustituyendo, por ejemplo, $\sec x = f(\tan x) =$ [ ] obtenemos las siguientes ecuaciones expresadas en términos de una sola función trigonométrica (tan x):

[ ] [ ]

$\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}$

- $\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = \tan x$
- $-\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = \tan x$

136

$$\sec x - 1 = \tan x$$

$x \in [0, 2\pi)$

$\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = \tan x$ | $-\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = \tan x$

$\tan x =$ [ ]

ecuación de la forma $f_t(x) = a$

- $\sqrt{1 + \tan^2 x} = 1 + \tan x$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$1 + \tan^2 x = (1 + \tan x)^2$

$1 + \tan^2 x = 1 + 2\tan x + \tan^2 x$

$2\tan x = 0$

$\tan x = 0$

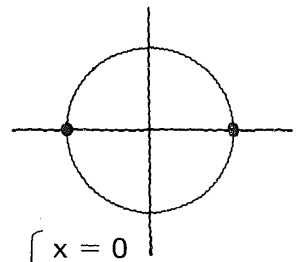
137

$$\sec x - 1 = \tan x$$

$x \in [0, 2\pi)$

$\tan x = 0$

$x =$ [ ]



- $x = 0$ ó $x = \pi$

138

$\sec x - 1 = \tan x$

$x = 0$

ó

$x = \pi$

Verificación:

$\sec(0) - 1 = \tan(0)$

$1 - 1 = 0$

$0 = 0$ ◀ **PCV**

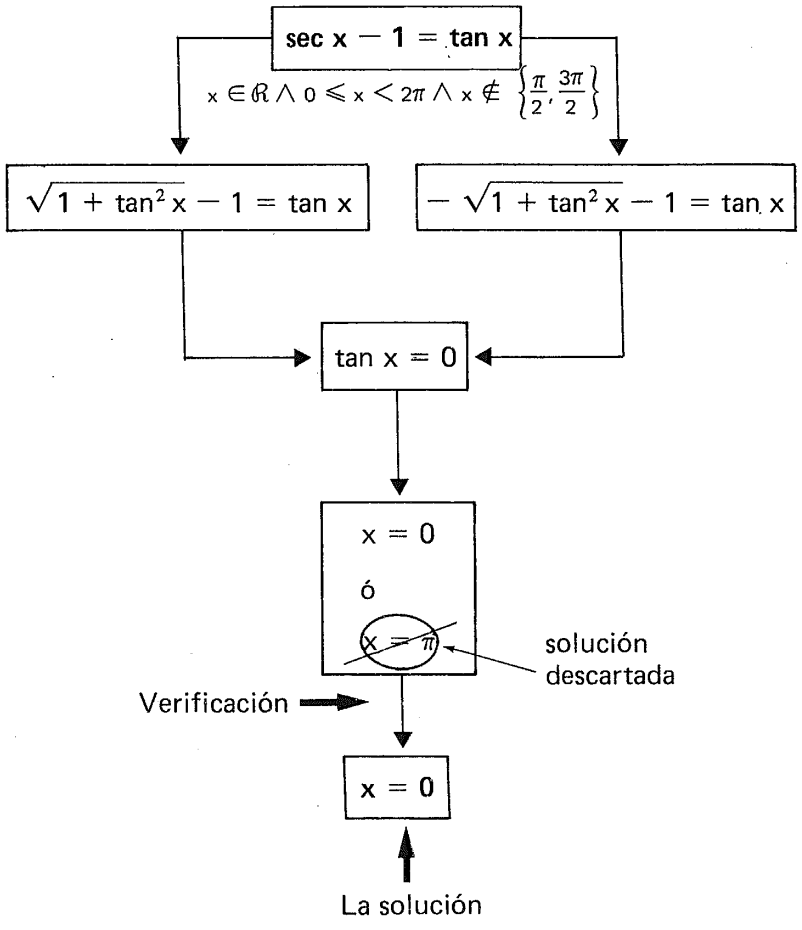
$\sec \pi - 1 = \tan \pi$

$-1 - 1 = 0$

$-2 = 0$ ◀ **PCF**

139

Estudiar con atención.



140

Se requiere resolver

$$2\cos x + 3\sec x = 7$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi \wedge x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Expresamos $\sec x = f(\cos x) =$ [ ]
y obtenemos:

[ ]

$\frac{1}{\cos x}$

$2\cos x + \frac{3}{\cos x} = 7$

141

$$2\cos x + 3\sec x = 7$$

↓

$$2\cos x + \frac{3}{\cos x} = 7$$

Multiplicamos ambos miembros por cos x:

[ ]

$2\cos^2 x + 3 = 7\cos x$

o bien:

$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

142

$$2\cos x + 3\sec x = 7$$

↓

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$

Resolvemos para cos x:

[ ]

$\cos x =$ [ ]
ó
$\cos x =$ [ ]

$\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$

$\cos x = \frac{7 \pm 5}{4}$

3

$\frac{1}{2}$

143

$2\cos x + 3\sec x = 7$

$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

~~$\cos x = 3$~~ se descarta, porque cos x no puede ser mayor que 1.

$\cos x = \frac{1}{2}$

144

$2\cos x + 3\sec x = 7$

$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

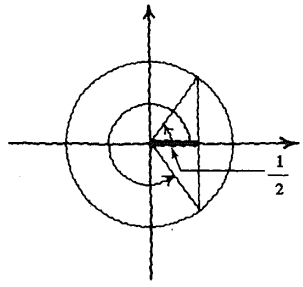
$\cos x = \frac{1}{2}$

De aquí obtenemos para el intervalo $[0, 2\pi)$:

$x = \square$

ó

$x = \square$



$\frac{\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{3}$ $(2\pi - \frac{\pi}{3})$

145

$2\cos x + 3\sec x = 7$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < 2\pi \wedge x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{5\pi}{3}$

Verificación:

- $x = \frac{\pi}{3}$

$2\cos\frac{\pi}{3} + 3\sec\frac{\pi}{3} = 7$

$2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 2 = 7$

$1 + 6 = 7$

$7 = 7$ ◀ PCV

ó

- $x = \frac{5\pi}{3}$

$2\cos\frac{5\pi}{3} + 3\sec\frac{5\pi}{3} = 7$

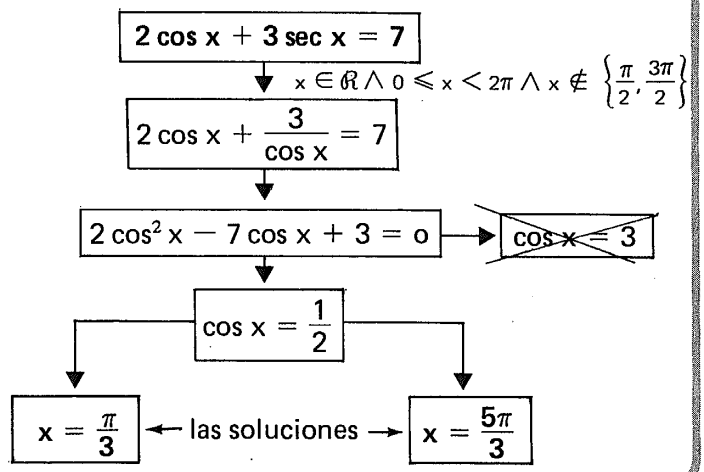
$2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 2 = 7$

$1 + 6 = 7$

$7 = 7$ ◀ PCV

146

Estudiar con atención.



5.8.5.1

Practica adicional de resolución de ecuaciones trigonométricas que pueden ser llevadas a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones trigonométricas, si se considera necesario.

5.8.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el conjunto solución de una ecuación trigonométrica dada, que puede ser llevada a alguna de las formas: $f_t(x) = a$ ó $f_t[f(x)] = a$ mediante transformaciones trigonométricas.

8.6

Ecuaciones de la forma $A \cdot B = 0$, en que A y B son expresiones trigonométricas

147

Se requiere resolver la ecuación

$$\textbf{sen x cos x} = \textbf{0}$$
$$x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

Aquí hacemos uso de la propiedad de las relaciones de igualdad, que hemos llamado

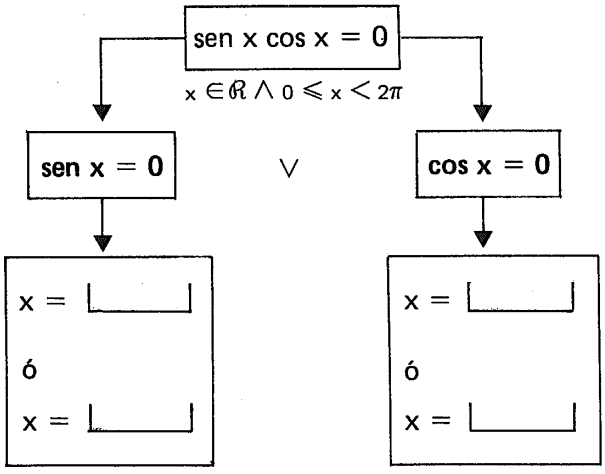
propiedad del producto nulo

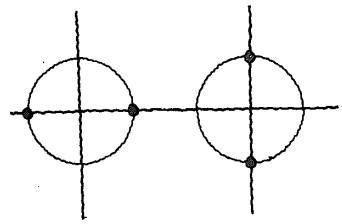
y que puede expresarse así:

si $ab = 0$

entonces $a = 0 \vee b = 0$

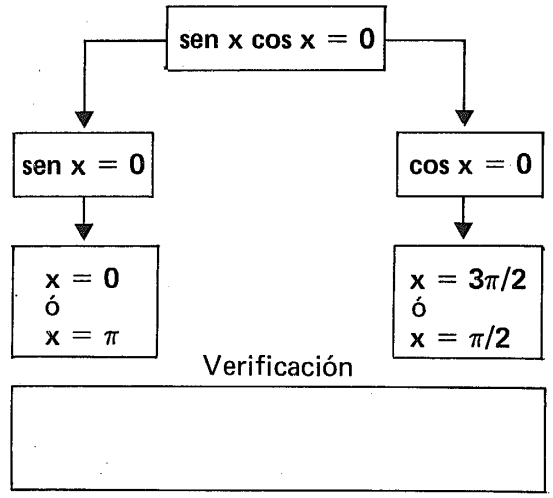
148





- 0
- $\frac{\pi}{2}$
- π
- $\frac{3\pi}{2}$

149



Respuesta en el cuadro siguiente.

- $x = 0$

$\operatorname{sen}(0)\cos(0) = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

- $x = \pi$

$\operatorname{sen}\pi \cos\pi = 0$

$0 \cdot (-1) = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

- $x = \pi/2$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

- $x = 3\pi/2$

$\operatorname{sen} 3\pi/2 \cos 3\pi/2 = 0$

$(-1) \cdot 0 = 0$

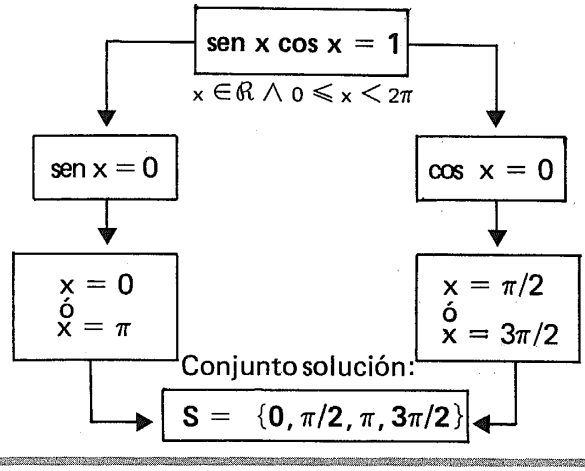
$0 = 0$

▲

PCV

150

Estudiar con atención.



151

Se requiere resolver

$$\text{sen } 2x + 2 \text{ sen } x = 0$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

Empecemos por expresar

sen 2x = f(sen x) = [ ]

y sustituyamos en la ecuación dada:

[ ]

2 sen x cos x

2 sen x cos x + 2 sen x = 0

152

sen 2x + 2 sen x = 0

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

↓

2 sen x cos x + 2 sen x = 0

↓

Factoricemos el primer miembro: → [ ]

2 sen x(cos x + 1) = 0

153

sen 2x + 2 sen x = 0

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

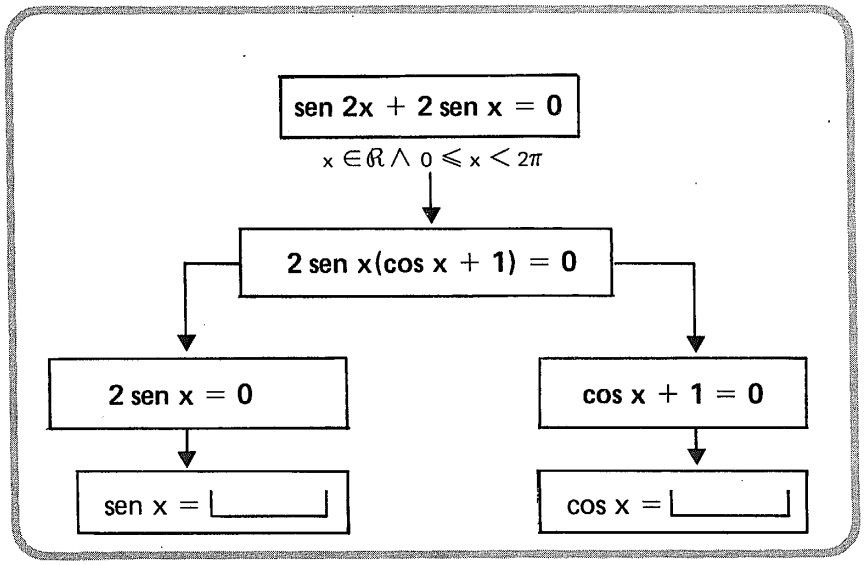
↓

2 sen x(cos x + 1) = 0

[ ] [ ]

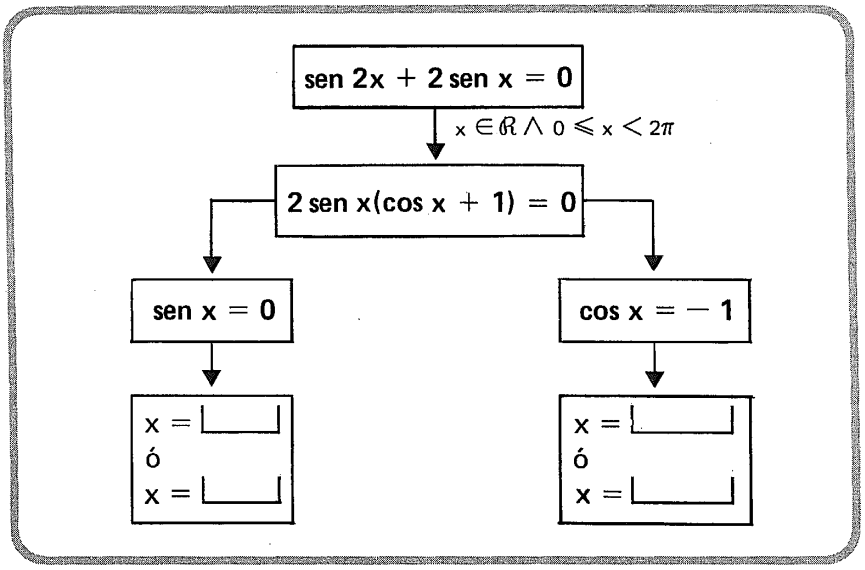
- 2 sen x = 0
- cos x + 1 = 0

154



• 0 • − 1

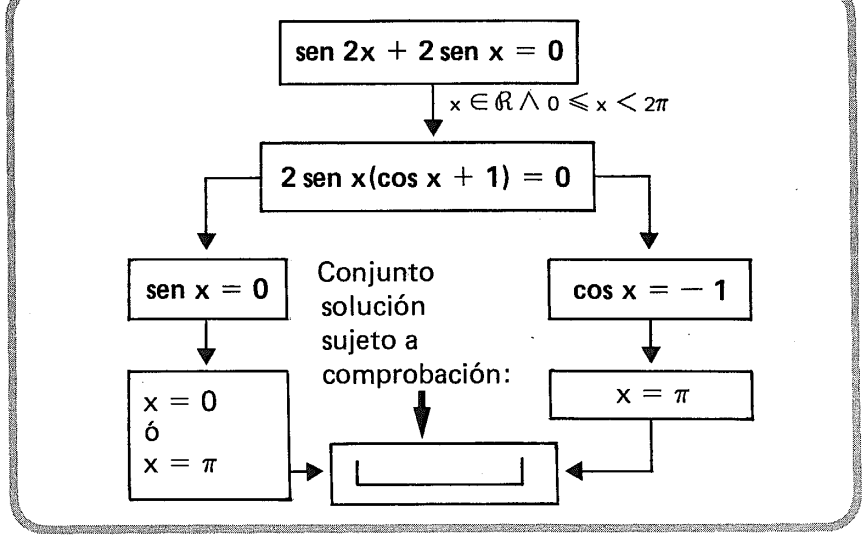
155



• 0 • π

• π

156



S = $\{0, \pi\}$

157

$$\textbf{sen } 2x + 2 \textbf{ sen } x = 0$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$$

$$S = \{0, \pi\}$$

Verificación

- $x = 0$
  $\text{sen } 2(0) + 2\,\text{sen}(0) = 0$
  $\text{sen}(0) + 2\,\text{sen}(0) = 0$
  $0 + 2 \cdot 0 = 0$
  $0 + 0 = 0$
  $0 = 0$
  ▲ PCV

- $x = \pi$
  $\text{sen } 2\pi + 2\,\text{sen } \pi = 0$
  $0 + 2 \cdot 0 = 0$
  $0 + 0 = 0$
  $0 = 0$
  ▲ PCV

158

Estudiar con atención.

$\textbf{sen } 2x + 2 \textbf{ sen } x = 0$

$x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 2\pi$

$2 \text{ sen } x \cos x + 2 \text{ sen } x = 0$

$2 \text{ sen } x(\cos x + 1) = 0$

$\text{sen } x = 0$ | $\cos x = -1$

$x = 0$ o $x = \pi$ | $x = \pi$

$S = \{0, \pi\}$

159

Se requieren las soluciones fundamentales de la ecuación

$$\textbf{tan } 2x + 2 \textbf{ sen } x = 0$$

Pongamos $\tan 2x = f(\text{sen } 2x, \cos 2x) =$ $\dfrac{\text{sen } 2x}{\cos 2x}$

con lo cual obtenemos, por sustitución en la ecuación original:

$$\frac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} + 2 \text{ sen } x = 0$$

160

$$\tan 2x + 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + 2 \operatorname{sen} x = 0$$

Multipliquemos ambos miembros por cos 2x:

$2 \operatorname{sen} x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$

161

$$\tan 2x + 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} x \cos 2x = 0$$

Sustituyamos

$\operatorname{sen} 2x = f(\operatorname{sen} x, \cos x) =$ $2 \operatorname{sen} x \cos x$

y

$\cos 2x = f(\cos x) =$ $2 \cos^2 x - 1$

$2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen} x(2 \cos^2 x - 1) = 0$

162

$$\tan 2x + 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen} x(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

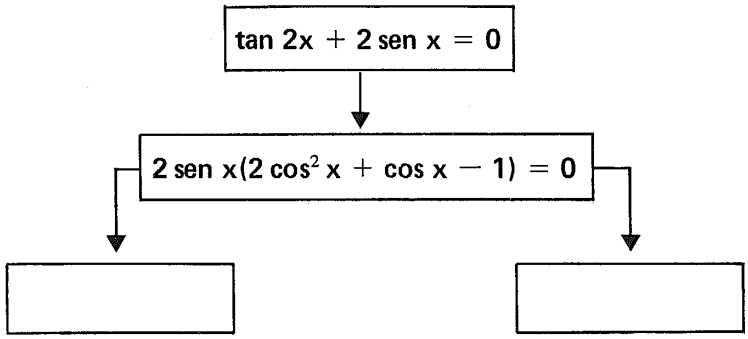
Factoricemos el primer miembro:

$2 \operatorname{sen} x(\cos x + 2 \cos^2 x - 1) = 0$

o

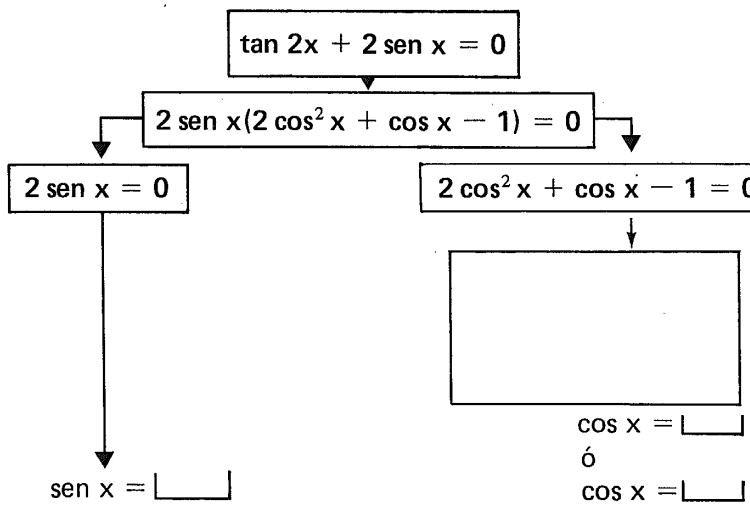
$2 \operatorname{sen} x(2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 0$

163



- $2 \operatorname{sen} x = 0$
- $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

164

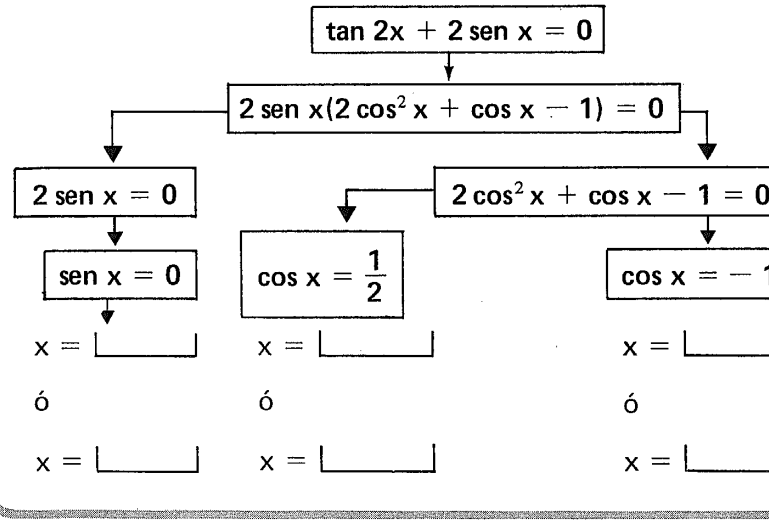


$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- 1/2
- 0
- -1

165



- 0
- $\frac{\pi}{3}$
- π
- π
- $\frac{5\pi}{3}$
- π

166

$\tan 2x + 2\operatorname{sen} x = 0$

$2\operatorname{sen} x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$

$2\operatorname{sen} x = 0$ | $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\operatorname{sen} x = 0$ | $\cos x = \frac{1}{2}$ | $\cos x = -1$

$x = 0$ ó $x = \pi$ | $x = \pi/3$ ó $x = 5\pi/3$ | $x = \pi$

Conjunto solución, sujeto a comprobación:

$S = \{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3\}$

167

$\tan 2x + 2\operatorname{sen} x = 0$

$S = \{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3\}$

Verificación

Respuesta en el cuadrosiguiente.

- $x = 0$
  $\tan(0) + 2\operatorname{sen}(0) = 0$
  $0 + 0 = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV

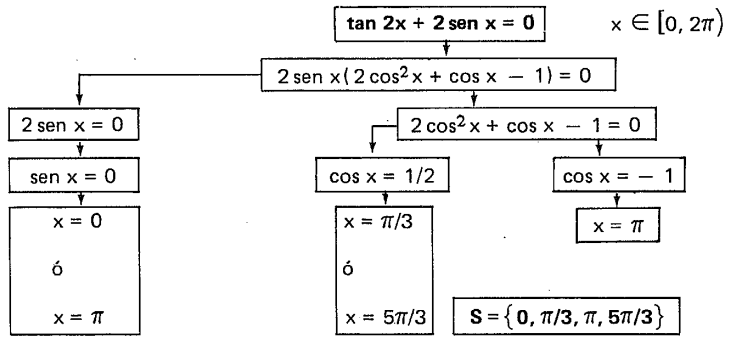
- $x = \pi$
  $\tan 2\pi + 2\operatorname{sen}\pi = 0$
  $0 + 2 \cdot 0 = 0$
  $0 = 0$ PCV

- $x = \pi/3$
  $\tan 2\pi/3 + 2\operatorname{sen}\pi/3 = 0$
  $-\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
  $-\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV

- $x = 5\pi/3$
  $\tan \frac{10\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = 0$
  $\sqrt{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
  $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV

168

Estudiar con atención.



5.8.6.1

Práctica adicional de resolución de ecuaciones trigonométricas de la forma: $A \cdot B = 0$ o que pueden ser llevadas a esa forma (A y B son expresiones trigonométricas), si se considera necesario.

5.8.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el conjunto solución de ecuaciones trigonométricas de la forma: $A \cdot B = 0$ en que A y B son expresiones trigonométricas;
- *determinar* el conjunto solución de ecuaciones trigonométricas que pueden ser llevadas a la forma: $A \cdot B = 0$ mediante transformaciones algebraicas y/o trigonométricas sencillas.

8.7

Ecuaciones conteniendo funciones trigonométricas inversas

169

Se requiere resolver ⟶ $\textbf{Arcsen x} = \frac{\pi}{6}$

$x \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1$

Escribimos: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} =$ ⌊_____⌋

$\frac{1}{2}$

170

$\text{Arcsen x} = \frac{\pi}{6}$

$x \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1$

La solución: $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$

Verificación: $\text{Arcsen } (\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

171

Resolver: $\textbf{Arccos x} = \pi$
$x \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1$

Escribimos: ⌊_____⌋

Solución: $x =$ ⌊_____⌋

Verificación: ⌊_____⌋

$\cos \pi = -1$

-1

$\text{Arccos}\,(-1) = \pi$

172

Resolver: $\textbf{arctan x} = -\frac{\pi}{4} \quad x \in \mathcal{R}$

Escribimos: ⌊_____⌋

Solución: $x =$ ⌊_____⌋

Verificación: ⌊_____⌋

$\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

-1

$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

173

$\textbf{arcsen 2x} = 47°$
$x \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1$

$x =$ ⌊_____⌋

$\text{sen } 47° \doteq 0.7313537$

$2x \doteq 0.7313537$

$x \doteq \frac{0.7313537}{2}$

↓

0.36567685

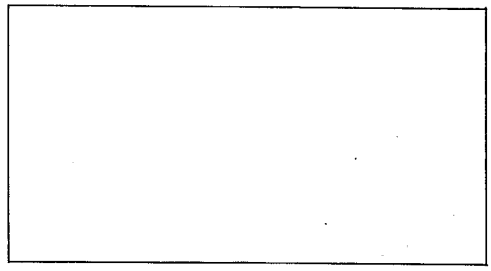
174

$\arcsen 2x = 47°$

$x \in \mathbb{R} \wedge -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

$x \doteq 0.36567685$

Verificación:



$\arcsen\ 2(0.36567685) = 47°$

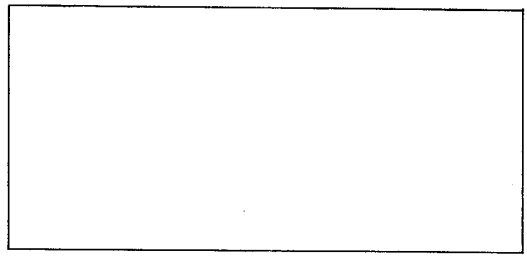
$\arcsen\ 0.7313536 = 47°$

$47° = 47°$

▲

PCV

$\arcsec(3x + 2) = 1$ (1 radián)



$x \doteq$ _____

$$\sec 1 = \frac{1}{\cos 1} \doteq \frac{1}{0.5403023}$$

$\sec 1 \doteq 1.8508157$

$3x + 2 \doteq 1.8508157$

$$x \doteq \frac{1.8508157 - 2}{3}$$

↓

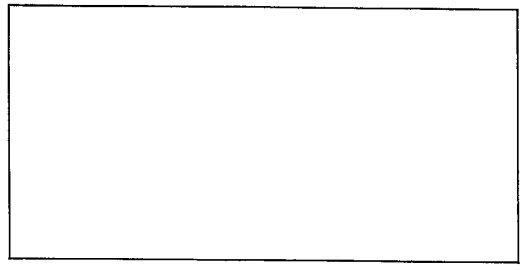
− 0.0497281

176

$\arcsec(3x + 2) = 1$

$x \doteq -\ 0.0497281$

Verificación:



$\arcsec(3x + 2) = 1$

$\arcsec[3x(-\ 0.0497281) + 2] = 1$

$\arcsec\ 1.8508157 = 1$

$$\arccos \frac{1}{1.8508157} = 1$$

$\arccos 0.54030231 = 1$

$1 = 1$

▲

PCV

177

Resolver: $\arccos 2x = \arcsen x$

Empezamos escribiendo: $2x =$ [ ]

$\cos(\arcsen x)$

178

$\arccos 2x = \arcsen x$

$2x = \cos(\arcsen x)$

de donde: $x =$ [ ]

$\dfrac{\cos(\arcsen x)}{2}$

179

$\arccos 2x = \arcsen x$

Obtuvimos: $x = \dfrac{\cos(\arcsen x)}{2}$

Por otro lado: $x =$ [ ]

$\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

180

$\arccos 2x = \arcsen x$

$x = \dfrac{\cos(\arcsen x)}{2}$

$x = \operatorname{sen}(\arccos 2x)$

Por transitividad:

$\cos(\arcsen x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

$\dfrac{\cos(\arcsen x)}{2} = \operatorname{sen}(\arccos 2x)$

o bien:

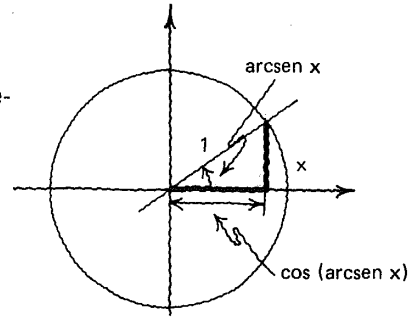
$\cos(\arcsen x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

181

$\arccos 2x = \arcsen x$

$\cos(\arcsen x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

Ahora observemos con atención la figura adjunta, e intentemos completar.



$\cos(\arcsen x) =$ ____

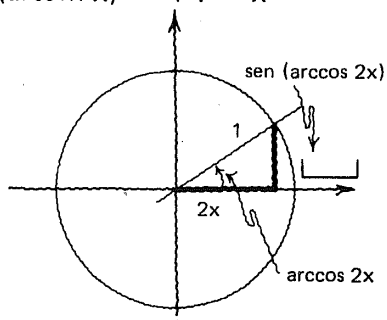
$\sqrt{1 - x^2}$

182

$\arccos 2x = \arcsen x$

$\cos(\arcsen x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

$\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$



$\operatorname{sen}(\arccos 2x) =$ ____

$\sqrt{1 - (2x)^2} = \sqrt{1 - 4x^2}$

183

$\arccos 2x = \operatorname{arcsen} x$

$\cos(\operatorname{arcsen} x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x) - 1$ ①

$\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{(1 - 4x^2)}$

184

$\arccos 2x = \operatorname{arcsen} x$

$\cos(\operatorname{arcsen} x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

$\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{1 - 4x^2}$

Ordenando y resolviendo para x esta ecuación: →

$x =$

ó

$x =$

$\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{1 - 4x^2}$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$1 - x^2 = 4(1 - 4x^2)$

$1 - x^2 = 4 - 16x^2$

$15x^2 - 3 = 0$

$5x^2 - 1 = 0$

$5x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{5}$

$x = \pm \sqrt{1/5}$

- $\sqrt{1/5} = \sqrt{0.2} \doteq 0.4472$
- $-\sqrt{1/5} = -\sqrt{0.2} \doteq -0.4472$

185

$\arccos 2x = \operatorname{arcsen} x$

$\cos(\operatorname{arcsen} x) = 2\operatorname{sen}(\arccos 2x)$

$\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{1 - 4x^2}$

$x \doteq 0.4472$ $\qquad$ $x \doteq -0.4472$

Verificación:

- $x \doteq 0.4472$

$\arccos 2x\ (0.4472) \doteq \operatorname{arcsen} 0.4472$

$\arccos 0.8944 \doteq \operatorname{arcsen} 0.4472$

$0.46370841 \doteq 0.46363242$

$26°34' \doteq 26°34'$

PCV

ó

- $x \doteq -0.4472$

$\arccos 2(-0.4472) \doteq \operatorname{arcsen}(-0.4472)$

$\arccos(-0.8944) \doteq \operatorname{arcsen}(-0.4472)$

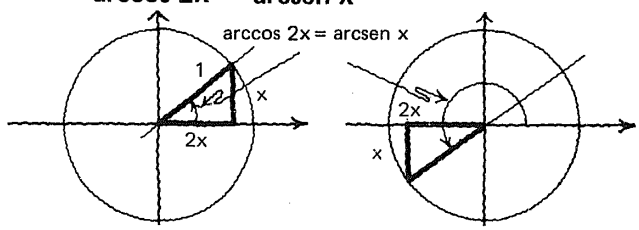
$206°34' \doteq 206°34'$

PCV

186

Observar con atención.

arccos 2x = arcsen x



Por Pitágoras: $(2x)^2 + x^2 = 1$

$4x^2 + x^2 = 1$

$5x^2 = 1$

$x^2 = 1/5$

$x = \pm \sqrt{1/5} \doteq \pm\ 0.4472$

187

Se requiere resolver: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan x\right) = 7$

$\frac{\pi}{4} + \arctan x = \arctan 7 =$ [ ]

1.4288993

188

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan x\right) = 7$

$\frac{\pi}{4} + \arctan x \doteq 1.4288993 + k\pi$

$\arctan x \doteq$ [ ]

$\underbrace{1.4288993 - \frac{\pi}{4}}_{0.6435012} + k\pi$

189

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan x\right) = 7$

$\arctan x \doteq 0.6435012 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$x \doteq$ ┌──────────┐

$\tan(0.6435012 + k\pi)$
$= \tan 0.6435012 \doteq 0.75$

190

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan x\right) = 7$

$x \doteq 0.75$

Verificación:

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan 0.75\right) = 7$

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.6435011\right) = 7$

$\tan 1.4288992 = 7$

$6.9999934 \doteq 7$ ◀ PCV

5.8.7.1

Práctica adicional de resolución de ecuaciones conteniendo funciones trigonométricas inversas, si se considera necesario.

5.8.7

En este punto, el alumno será capaz de:

- *determinar* el conjunto solución de algunas ecuaciones sencillas conteniendo funciones trigonométricas inversas.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100